

Chương 4: GIỚI HẠN

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

GIÁO KHOA

I. Định nghĩa và một số định lý về giới hạn của hàm số

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

a. Giới hạn hữu hạn

Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in (a; b) \setminus \{x_0\} \forall n \text{ mà } \lim x_n = x_0 \text{ ta có } \lim f(x_n) = L$$

Nhận xét:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C \quad (C \text{ là hằng số})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

b. Giới hạn vô cực

Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in (a; b) \setminus \{x_0\} \forall n \text{ mà } \lim x_n = x_0 \text{ ta có } \lim f(x_n) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in (a; b) \setminus \{x_0\} \forall n \text{ mà } \lim x_n = x_0 \text{ ta có } \lim f(x_n) = -\infty$$

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa (xem sách giáo khoa nâng cao trang 148)

Nhận xét: Với mọi số nguyên dương k , ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

3. Một số định lý về giới hạn hữu hạn

Định lý: Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ ($L, M \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [C \cdot f(x)] = C \cdot L \text{ (C là hằng số)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (M} \neq 0\text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in J \setminus \{x_0\}$ (J là một khoảng nào đó chứa x_0) thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Định lý vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bởi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

II. Giới hạn một bên

1. Giới hạn hữu hạn

- Giới hạn bên phải:** Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0; b)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in (x_0; b) \forall n, \lim x_n = x_0 \text{ ta có } \lim f(x_n) = L$$

- Giới hạn bên trái:** Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; x_0)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in (a; x_0) \forall n, \lim x_n = x_0 \text{ ta có } \lim f(x_n) = L$$

Nhận xét:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$
- Các định lý về giới hạn hữu hạn vẫn đúng với giới hạn một bên.

2. Giới hạn vô cực

Định nghĩa (tương tự định nghĩa giới hạn hữu hạn)

III. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Định lý: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Quy tắc 1: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ được cho trong bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$

$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$, trong đó

J là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4 - x^2}{x + 2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6} \right)$

Lời giải:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{(-3)^2 - 1}{-3 + 1} \right) = -\frac{8}{-2} = -4$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4 - x^2}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(2 - x)(2 + x)}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} (2 - x) = 4$

c) $\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6} \right) = \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{(\sqrt{x+3} - 3)(\sqrt{x+3} + 3)}{x - 6} \right) = \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{x - 6}{(x - 6)(\sqrt{x+3} + 3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + 3)} = \frac{1}{6}$

Ví dụ 2. Tìm giới hạn các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^2 - 72}{x^2 - 2x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5x^2 + 4x^6}{(1 - x)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$

Lời giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^2 - 72}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^3 + 3x^2 + 8x + 24)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 3x^2 + 8x + 24}{x+1} = \frac{51}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 - 2x - 3)}{(x-3)(x^3 + 3x^2 + x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5x^2 + 4x^6}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x)}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x}{(x-1)} = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^3 + ax^2 + a^2x + a^3) = 4a^3$$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right)$$

Lời giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2 - (x+1)}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{x+1} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(1 + x + x^2) - 3}{(1 - x)(1 + x + x^2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} \right] = -\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{1+x+x^2} \right) = -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{x - 2 + 4}{(x-2)(x+2)} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

Ví dụ 4. Tìm giới hạn các hàm số sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{49 - x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{x^3 - 4x^2 + 3}$$

Lời giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{49 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{x-3} - 2)(\sqrt{x-3} + 2)}{(\sqrt{x-3} + 2)(7-x)(7+x)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(7+x)(\sqrt{x-3} + 2)} = \frac{1}{56}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt{x+2})(2 + \sqrt{x+2})}{(x-1)(x-2)(2 + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-1)(2 + \sqrt{x+2})} = -\frac{1}{4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x^3-4x^2+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+7}-3)(\sqrt{2x+7}+3)}{(x-1)(x^2-3x-3)(\sqrt{2x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x^2-3x-3)(\sqrt{2x+7}+3)} = -\frac{1}{15}$$

Ví dụ 5. Tìm giới hạn các hàm số sau

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{2x^3 + 5x + 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{2x + x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2x+12} + x}{x^2 + 2x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x^3 + x^2 - 2}$$

Lời giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{2x^3 + 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} \cdot 1 + 1)}{(x+1)(2x+3)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} \cdot 1 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(2x+3)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} \cdot 1 + 1)} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{2x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt[3]{1-x})(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{x(x+2)(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+2)(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} = \frac{1}{6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2x+12} + x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{2x+12} + x)(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2)}{x(x+2)(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2)} \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 12)}{x(x+2)(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 12}{(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2)x} = -\frac{5}{6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x^3 + x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[4]{x} - 1)((\sqrt[4]{x} + 1))(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 2)(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 2)(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x^2 + x + 2)(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{12}$$

Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2x}}{3x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1 - x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x+3}}{x^2+1}$$

Lời giải:

a) Đặt $x = -t$. Với $x \rightarrow -\infty \Rightarrow t = +\infty$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2x}}{3x-1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{t^2+3t-2t}}{-3t-1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{t}-2}}{-3-\frac{1}{t}} = \frac{\sqrt{1+3.0}-2}{-3-0} = \frac{1}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}-1} = 4$$

Đặt $x = -t$. Với $x \rightarrow -\infty \Rightarrow t = +\infty$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^2-t+2}-3t+1}{\sqrt{4t^2+1}+1+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}}-3+\frac{1}{t}}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}}+1} = -\frac{2}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x+3}}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{0+3.0}}{1+0} = 0$$

Ví dụ 7. Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2-3x+2}+x-1)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2-3x+1}-x+3)$$

Lời giải:

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-3x+2}+x-1) = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-3x+2}+x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}-x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}+2}-1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-3x+1}-x+3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{3}{x} \right) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-3x+1}-x+3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-8}{\sqrt{x^2-3x+1}+(x-3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{8}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{3}{x}} = \frac{3}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 8. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1})$

Lời giải:

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x + 1) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{4x^2 - x + 3} + (2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + 2 - \frac{1}{x}}} = \frac{3}{\sqrt{4 + 2}} = \frac{3}{4}$$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x + x - \sqrt[3]{x^3 - 1})$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{1}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \right) = 0$$

Ví dụ 9. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2}$

Lời giải:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x + 2}{x - 2}} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{(x - 2)(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2x - 1} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - x}{(x - 2)(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2x - 1} = -\frac{1}{3}$

Ví dụ 10. Tìm các giới hạn của các hàm số tại các điểm chỉ ra:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{8 - x^3} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{x^4 - 16}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \end{cases} \quad \text{tại } x = 2$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x}{8 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{(2-x)(4+2x+x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 + 2x + 4} = -\frac{2}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \dots \text{Do đó, không tồn tại } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Ví dụ 11. Kết quả giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17} = \frac{\sqrt{a}}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của

a) 7 b) 5
c) 9 d) 13

$$\begin{aligned} \text{Ta có } L &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(2 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2} \right)}}{3|x| - 17} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{2 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{3|x| - 17} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{2 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{-3x - 17} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{3 + \frac{17}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{a}}{b} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 12. Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $T = a^2 + ab$ là:

Trang 8

c) $T = 4$

d) $T = -2$

Lời giải:

Đặt $f(x) = x^2 + ax + b - 1 \Rightarrow f(1) = 0$

Khi đó $f(x) = (x-1)(x-x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-x_0)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x_0}{x+1} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_0 = -2 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 \Rightarrow a = 1; b = -1 \Rightarrow T = 0$. **Chọn A**

Ví dụ 13. Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - (3a+2)x + b}{x^2 - 3x + 2} = 4$. Giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$ là:

a) $T = 90$

b) $T = 80$

c) $T = 16$

d) $T = 20$

Lời giải:

Đặt $f(x) = 3x^2 + (2a+1)x + b \Rightarrow f(2) = 0$

Khi đó: $f(x) = (x-2)(3x-m) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - (3a+2)x + b}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x-m)}{(x-2)(x-1)} = 4$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-m}{x-1} = 4 \Leftrightarrow 6-m = 4 \Leftrightarrow m = 2$

Suy ra $f(x) = (x-2)(3x-2) = 3x^2 - 8x + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow T = 20$. **Chọn D**